



I. Vecteurs de l'espace :

01. Prolongement de la notion d'un vecteur dans le plan à l'espace :

a. notion de vecteur dans l'espace (\mathcal{E}):

dans le plan un vecteur \overrightarrow{AB} est défini par :

- Direction de \overrightarrow{AB} : c'est la droite (AB) .
- Sens de \overrightarrow{AB} : c'est le sens de A vers B.
- La norme de \overrightarrow{AB} (ou la longueur de \overrightarrow{AB}) .est la distance AB on note : $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.
- Cette notion sera prolongée à l'espace (\mathcal{E}) et ainsi toutes les propriétés des vecteurs dans le plan sont valables dans chaque plan de l'espace (\mathcal{E}).

b. Exemple :

- I est le milieu de $[AB]$ est équivalent à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
- Soient A et B et C trois points non alignés de l'espace (\mathcal{E}) donc A et B et C détermine un plan et un seul noté (ABC) .
- Dans le plan (ABC) , on considère le triangle non aplati EFG ; I et J sont respectivement les milieux de $[EF]$ et $[EG]$ donc on peut déduire que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$ et aussi les droites $(IJ) \parallel (FG)$.

c. Remarque :

- Le cas $A = B$ le vecteur $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (le vecteur nul) n'a pas de direction et de sens et sa norme est nulle.
- On dit que deux vecteurs sont égaux si ils ont des directions parallèles et même sens et même norme.
- Un quadrilatère ABCD dans l'espace (\mathcal{E}) est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

02. Calculs vectoriels dans l'espace :

a. Remarque :

La somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel sont définis de la même manière que dans la géométrie plane et on a les mêmes propriétés.

Par exemple :

- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- Relation de Chasles $\forall A, B, C \in (\mathcal{E}) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- L'opposé du vecteur \vec{u} est le vecteur qui a même direction et même norme mais sens opposé du sens \vec{u} et on note $-\vec{u}$.
- Le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$:
 - $\vec{v} = k\vec{u}$ a la même direction que \vec{u} .
 - $\vec{v} = k\vec{u}$ a le même sens que \vec{u} si $k > 0$. $\vec{v} = k\vec{u}$ a le sens opposé que \vec{u} si $k < 0$.



Michel Chasles
(1793 - 1880)



▪ La norme de $\vec{v} = k\vec{u}$ vérifie $\|\vec{v}\| = |k|\|\vec{u}\|$.

- Pour tout vecteur \vec{u} on pose $0.\vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a $k.\vec{0} = \vec{0}$.

d. Propriétés :

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace (\mathcal{E}) et pour tous réels k et k' on a :

1. $(k + k').\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
2. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
3. $k(k'.\vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$.
4. $1.\vec{u} = \vec{u}$.
5. $k.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (k = 0 \text{ et } \vec{u} = \vec{0})$.

II. Colinéarité de deux vecteurs – définition vectoriel d'une droite dans l'espace (\mathcal{E}) .

01. Colinéarité de deux vecteurs – Colinéarité de trois points :

a. Définition :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si il existe un α de \mathbb{R} tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
(c.à.d. l'un des deux vecteurs s'écrit en fonction de l'autre).

b. Remarque :

- Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.
- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $(AB) \parallel (CD)$.
- A et B et C trois points de l'espace (\mathcal{E}) sont alignés si et seulement si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

02. Définition vectoriel d'une droite dans l'espace (\mathcal{E}) :

a. Définition et propriété :

Soient A et B deux points distincts de l'espace (\mathcal{E}) .

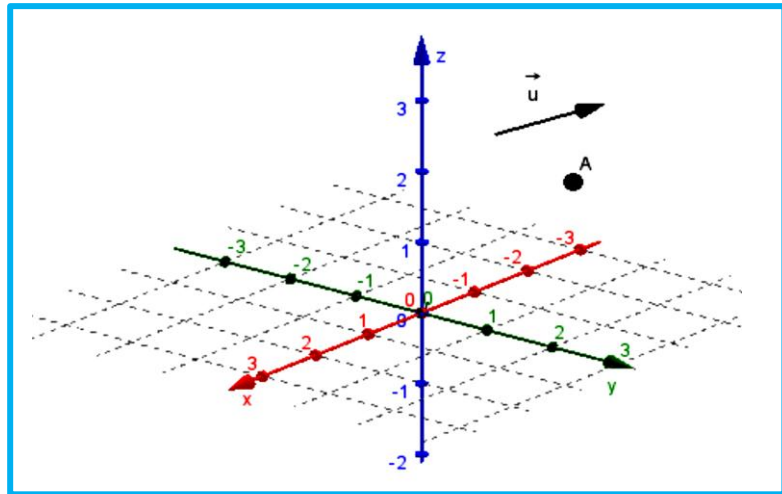
- Tout vecteur non nul \vec{u} de l'espace (\mathcal{E}) colinéaire avec le vecteur \overrightarrow{AB} est appelé vecteur directeur de la droite (AB) .
- L'ensemble des points M de l'espace (\mathcal{E}) qui vérifient $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ tel que α de \mathbb{R} est la droite (D) qui passe par le point A et de vecteur directeur \vec{u} , on note $D(A, \vec{u})$

$$\text{d'où : } D(A, \vec{u}) = \{M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} ; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

**b. Exemple :**

Soit A un point et \vec{u} est un vecteur non nul de l'espace (\mathcal{E}) (voir figure ci contre) .

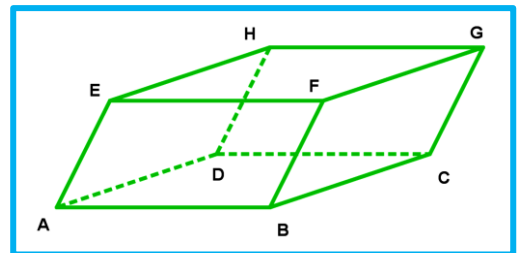
Construire la droite $D(A, \vec{u})$.

**III. Vecteurs coplanaires – détermination vectoriel d'un plan dans l'espace :****01. Vecteurs coplanaires :****a. Définition et théorème :**

- Quatre points A et B et C et D de l'espace (\mathcal{E}) sont coplanaires si et seulement si les quatre points appartiennent au même plan .
- Trois vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} de l'espace (\mathcal{E}) sont coplanaires si et seulement s'il existe quatre points A et B et C et D coplanaires tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

b. Exemple :

ABCDEFGH est parallélépipède trouver 3 vecteurs coplanaires puis 3 vecteurs non coplanaires .

**Correction :**

- On considère les vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$.
On a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$ et on sait que les points D et C et G et H sont coplanaires d'où les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires .
- les vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires .

c. Remarque :

- Si parmi les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs sont colinéaires alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires .
- Si trois vecteurs sont constitués par cinq points on ne peut pas confirmer que les cinq points sont coplanaires . **Exemple** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ sont coplanaires car $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ sont colinéaires mais les points A et B et D et E et F sont non coplanaires car le point D n'appartient pas au plan déterminé par A et B et E et F .

02. Détermination vectoriel d'un plan dans l'espace :**a.** Définition et théorème :

- Tout plan de l'espace (\mathcal{E}) est déterminé par un point donné de l'espace (\mathcal{E}) et de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non coplanaires de (\mathcal{E}) .
- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont appelés vecteurs directeurs du plan, ce plan sera noté $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$.
- L'ensemble des points M de l'espace (\mathcal{E}) qui vérifient $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ tel que x et y de \mathbb{R} est le plan (P) qui passe par le point A et orienter par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$
- d'où : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} ; x \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

b. Remarque :

\vec{u} et \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) .

- \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si l'un des trois vecteurs s'écrit en fonction des deux autres.
- \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si $\exists x, y \in \mathbb{R} / \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Exemple :

$$\diamond \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD} \quad (\overrightarrow{AB} \text{ s'écrit en fonction de } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AD})$$

$$\diamond \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD} \quad (\overrightarrow{BC} \text{ s'écrit en fonction de } \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{BD})$$

- Le vecteur nul est coplanaire avec deux autres vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) .

c. Exercice :

On considère les points les points A et B et C et D et E de l'espace (\mathcal{E}) tel que :

$$(1) : 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}.$$

1. Montrer que : les points A et B et C et D sont coplanaires.

Correction :

On a :

$$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + 4(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) - 5(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$$

D'où : $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$ donc le vecteur \overrightarrow{AD} est écrit en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

Donc les vecteurs : \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont coplanaires.

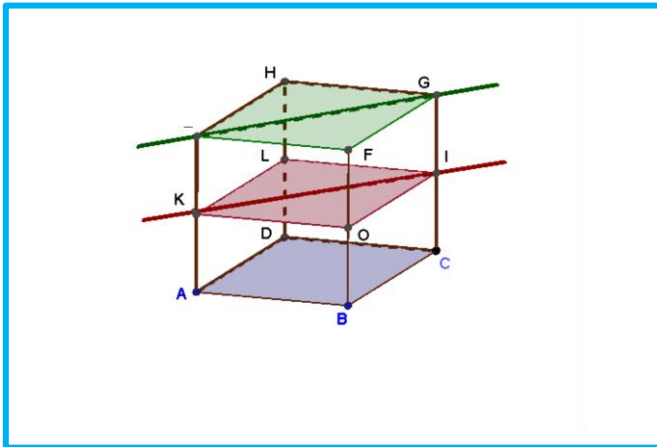
D'où : les points A et B et C et D sont coplanaires.

Conclusion : les points A et B et C et D sont coplanaires.

IV. Parallélisme dans l'espace :**01.** Parallélisme des droites dans l'espace (\mathcal{E}):**a.** Définition :

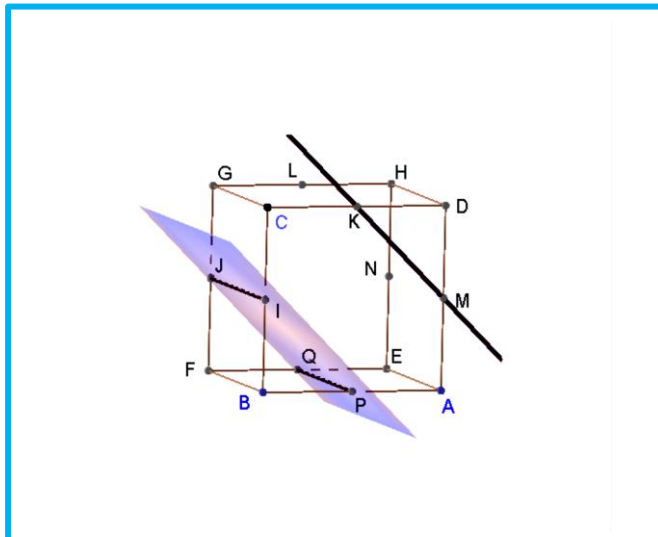
$D(A, \vec{u})$ et $\Delta(B, \vec{v})$ sont deux droites de l'espace (\mathcal{E}).

$\Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$ ou encore $\Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{u} ; \alpha \in \mathbb{R}^*$.

b. Exemple :**02.** Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace (\mathcal{E}):**a.** Définition :

$D(A, \vec{u})$ et $P(B, \vec{v}, \vec{w})$ sont une droite et un plan de l'espace (\mathcal{E}).

la droite $D(A, \vec{u})$ est parallèle au plan $P(B, \vec{v}, \vec{w})$ si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires ou encore $D(A, \vec{u}) \parallel P(B, \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R}$.

b. Exemple :



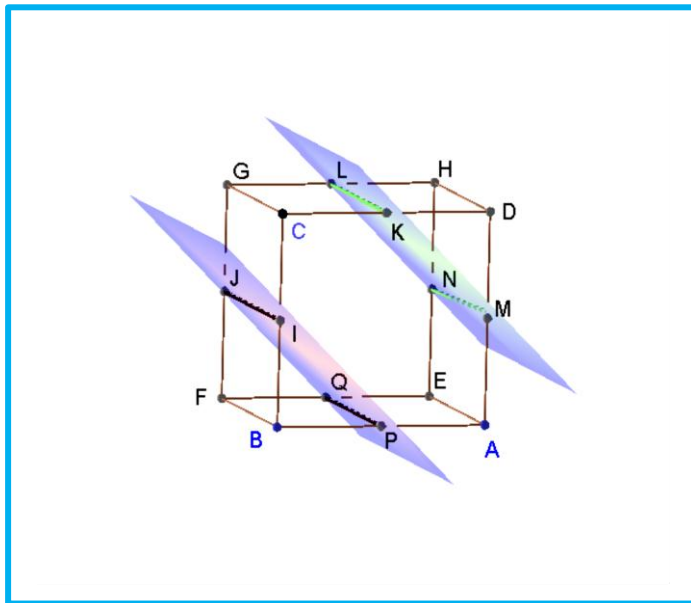
03. Parallélisme de deux plans dans l'espace (\mathcal{E}):

a. Définition :

$P(B, \vec{v}, \vec{w})$ et $Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ sont deux plans parallèles dans l'espace (\mathcal{E}) si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{u}_1 et \vec{v}_1 sont coplanaires ou encore.

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) \parallel Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1) \Leftrightarrow (\vec{u}_1 = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{u}_2 = x'\vec{v} + y'\vec{w} / x', y' \in \mathbb{R})$$

b. Exemple :



04. Exercice :

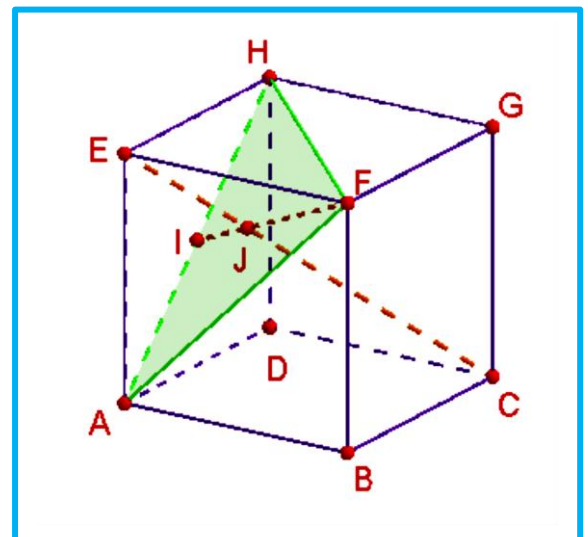
On considère un cube ABCDEFGH, tel que I est le milieu de [AH] et J est un point de [FI]

tel que : $\vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FI}$.

1. Construire la figure .
2. Montrer que : $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$.
3. Montrer que : $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$.
4. Que peut-on conclure pour les points E et J et C .

Correction :

1. On construit une figure :





2. Montrons que : $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$:

On a :

$$\begin{aligned}\vec{EC} &= \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC} \\ &= -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD} ; (\vec{BC} = \vec{AD})\end{aligned}$$

Conclusion : $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$.

3. Montrons que : $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$:

On a :

$$\begin{aligned}\vec{EJ} &= \vec{EF} + \vec{FJ} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{FI} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{FE} + \vec{EA} + \vec{AI}) \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}\left(\vec{FE} + \vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{AH}\right) \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}\left(\vec{FE} + \vec{EA} + \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{EH})\right) \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}\left(\vec{FE} + \frac{1}{2}\vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{EH}\right) \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{FE} + \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{EH} \\ &= \vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{AD} \quad (\vec{FE} = \vec{AB} ; \vec{EH} = \vec{AD}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{AD} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AD}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{EC} ; (\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD})\end{aligned}$$

Conclusion : $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$.

4. Dédution pour les points E et J et C :

Puisque $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$ donc les vecteurs \vec{EJ} et \vec{EC} sont colinéaires par suite les points E et J et C sont colinéaires.

Conclusion : les points E et J et C sont colinéaires.